
Počítačová grafika III – Důležitost, BPT

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

Davis Cup

- Premier international team competition in men's tennis
- World group: 16 teams
- Total: 137 (in 2007)
- Founded 1900
 - US vs. Britain



Davis Cup History

- Founded by **Dwight Filley Davis** (1879 – 1945)
 - ❑ Harvard University
 - ❑ Designed the tournament format
 - ❑ Commissioned the trophy design (\$1000 then, approx. \$27,600 in 2011 according to purchasing power)
- 1900 – 1904: US vs. British Isles
- 1905: Included Belgium, Austria, France, and “Australasia”
- by 1920: 20 nations
- 2012: 101th anniversary (some years were skipped)



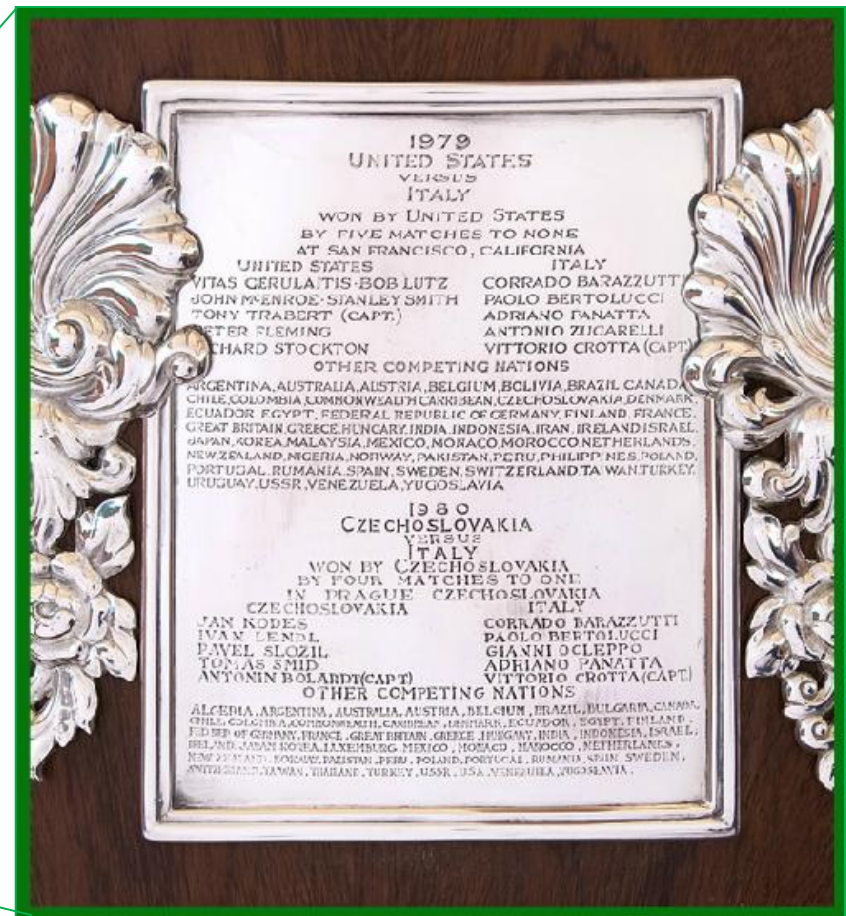
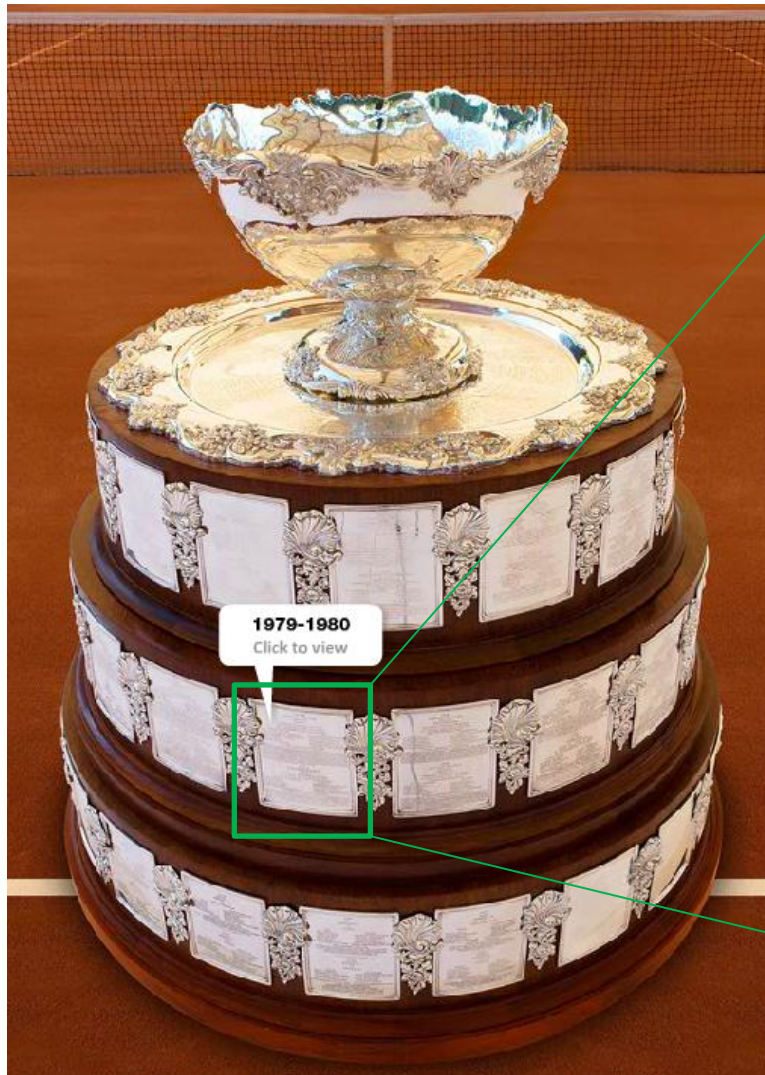
Czechoslovakia / Czech Republic in DC

- 1921: first entered the competition
- 59 years played
- 12 years in world group
- Most wins: **Jan Kodeš**

- Runners Up: 1975 (SWE), 2009 (ESP)
- Years won: 1980, 2012



Davis Cup Trophy



Davis Cup: The 2012 Final in an randomly picked Czech household



Davis Cup: The 2012 Final in an randomly picked Czech household



Davis Cup: The 2012 Final in an randomly picked Czech household



Davis Cup: The 2012 Final in an randomly picked Czech household





Impact of the 2012 Czech Republic DC victory on CG education



Path Tracing funguje!



Jerome White

Path Tracing funguje!



Martin Geupel (DeadClown)
raccoon-artworks.de

Path Tracing funguje!



Chakib Rabia Chakib Rabia®
2012



Demo



<http://corona-renderer.com/>



Vývoj: Ondra Karlík

Omezení algoritmu sledování cest

Sekundární
světelné zdroje

Kaustiky

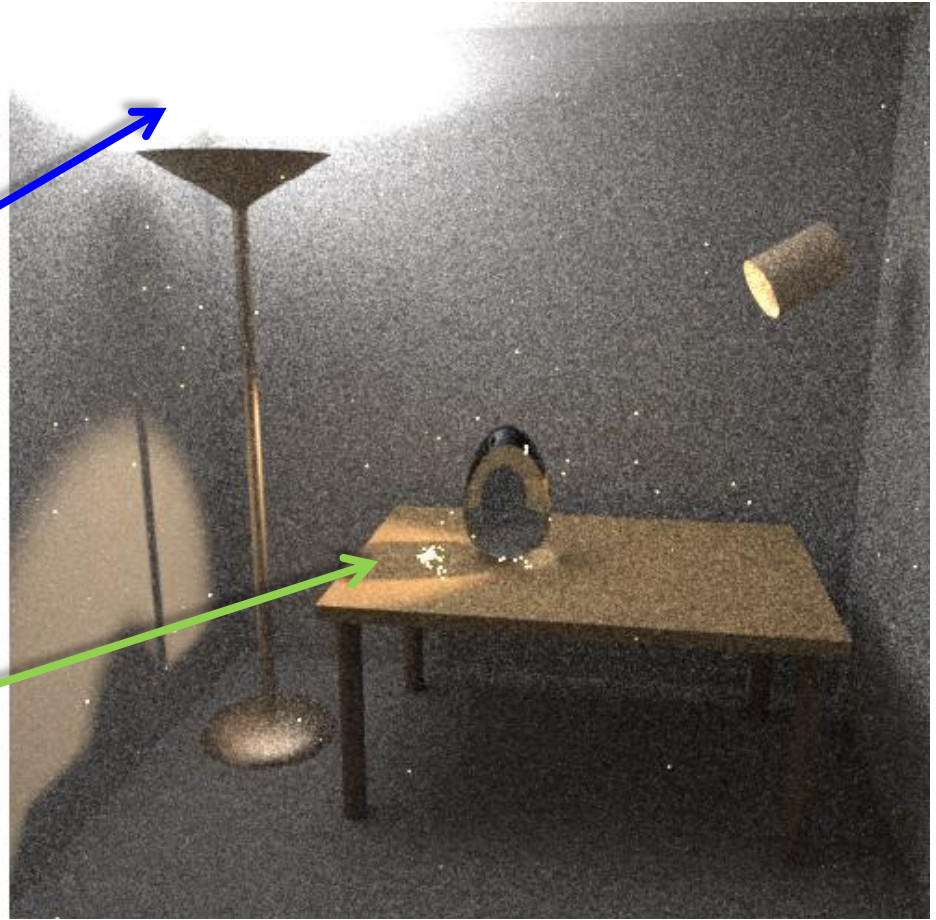


Image: Eric Veach

Důležitost a dualita v zobrazování

Měřicí rovnice

- Dosud: výpočet radiance v izolovaných bodech
- Ve skutečnosti nás zajímá průměrná radiance přes pixel: integrál
- **Měřicí rovnice** (Measurement equation)

Měřicí rovnice

odezva virtuálního (lineárního) senzoru na radianci (**barva pixelu**)

relativní odezva senzoru (váha) různé W_e pro každý senzor (pixel)

$$I = \int_{M H(\mathbf{x})} \int W_e(\mathbf{x}, \omega) \cdot L_1(\mathbf{x}, \omega) \cdot \cos \theta \, d\omega \, dA$$

přes celou plochu scény a všechny směry (virtuální senzory musí být součástí scény, nenulový příspěvek pouze na ploše senzoru kvůli W_e)

Příklad: Zářivý tok přes oblast jako měřicí rovnice

- Dána oblast S

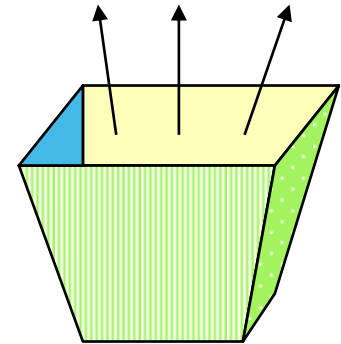
$$S \subset M \times H$$

(podmnožina povrchu scény a příslušných směrů)

- Pro W_e definované

$$W_e(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, \omega) \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je výsledkem měřicí rovnice **zářivý tok** $\Phi(S)$.



Měřicí rovnice jako skalární součin funkcí

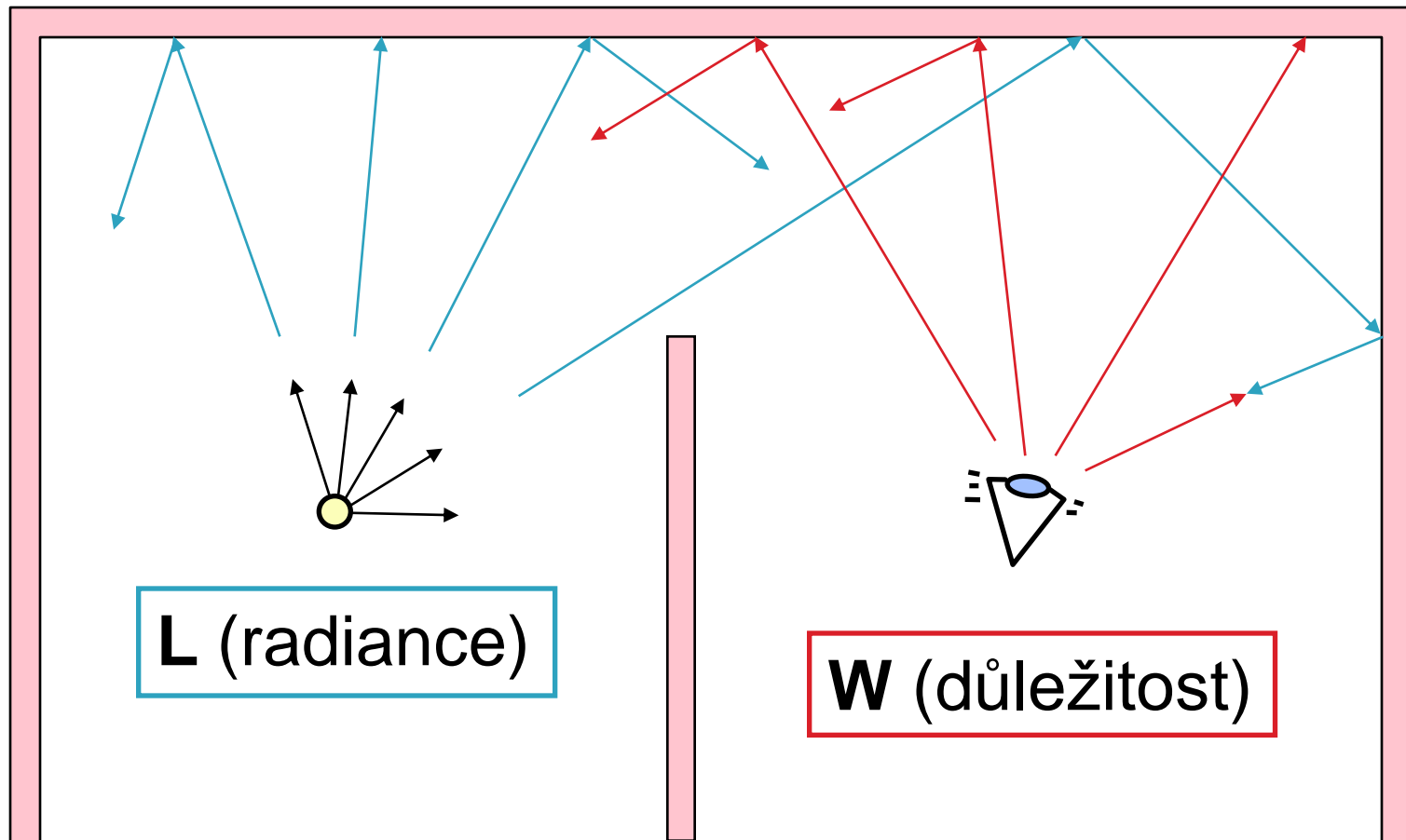
- Definujeme **skalární součin funkcí f a g** :

$$\langle f, g \rangle = \int_{M} \int_{H(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \omega) \cdot g(\mathbf{x}, \omega) \cdot \cos \theta \, d\omega \, dA$$

- **Měřicí rovnice**

$$I = \langle W_e, L_i \rangle$$

Propagace radiance a důležitosti



Důležitost (importance)

- W_e popisuje, jak důležitá je příchozí radiance pro odezvu senzoru
- 1 krok do scény: Příchozí radiance na senzoru = odchozí radiance z bodů scény
- 2, 3, ... kroky do scény: ...
- W_e interpretujeme jako veličinu emitovanou ze sensorů (stejně jako je radiance L_e emitovaná ze zdrojů světla)
- Takto interpretovanou veličinu W_e nazýváme **emitovanou funkcí důležitosti** (emitted importance function, emitted potential function)

Přenos důležitosti

- Funkce důležitosti se přenáší podobně jako radiance a dosahuje **ustáleného stavu** popsaného **ustálenou funkcí důležitosti W** :

$$W(\mathbf{x}, \omega_o) = W_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} W(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot \underbrace{f_r(\mathbf{x}, \omega_o \rightarrow \omega_i)} \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

Jako zobrazovací rovnice, s tím rozdílem, že argumenty BRDF jsou přehozeny (pro odraz identické, nikoli však pro lom)

Dualita důležitosti a radiance

**emitovaná
importance**

**ustálená
příchozí
radiance**

$$I = \langle W_e, L_i \rangle$$
$$= \langle W_i, L_e \rangle$$

**ustálená
příchozí
importance**

**emitovaná
radiance**

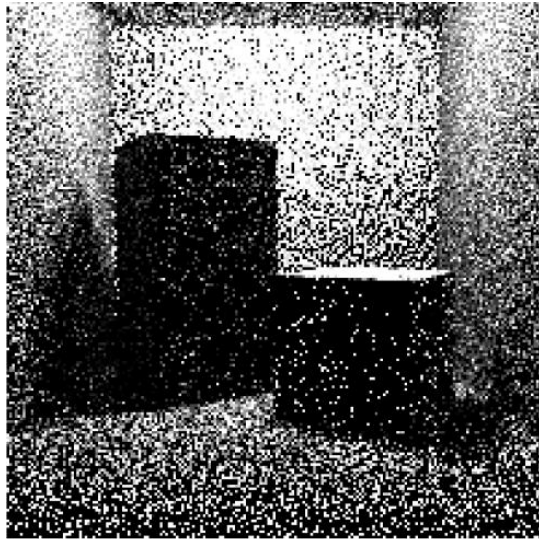
Dualita důležitosti a radiance

- V dané scéně je pouze jediná emitovaná a ustálená funkce radiance
- **Ale každý pixel má jinou emitovanou a ustálenou funkci důležitosti**

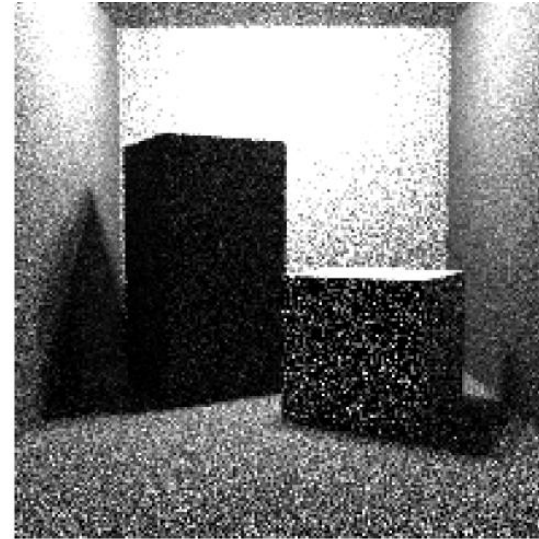
Dualita v praxi: Sledování světla

- Sledování cest (path tracing)
 - Rekurzivně řeší zobrazovací rovnici
- **Sledování světla (light tracing)**
 - Rekurzivně řeší rovnici přenosu důležitosti
 - Cesty začínají na zdrojích světla
 - Mohou náhodně zasáhnout senzor
 - Nebo explicitní napojení na senzor (jako přímé osvětlení v PT)
 - **Pozor:** argumenty BRDF musí být obráceny

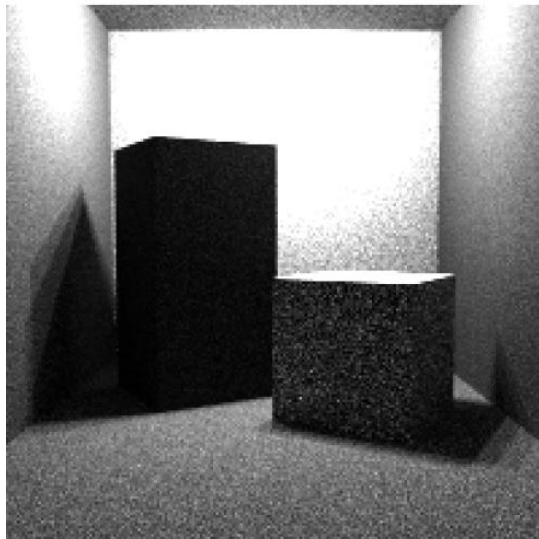
Sledování světla (light tracing) v praxi



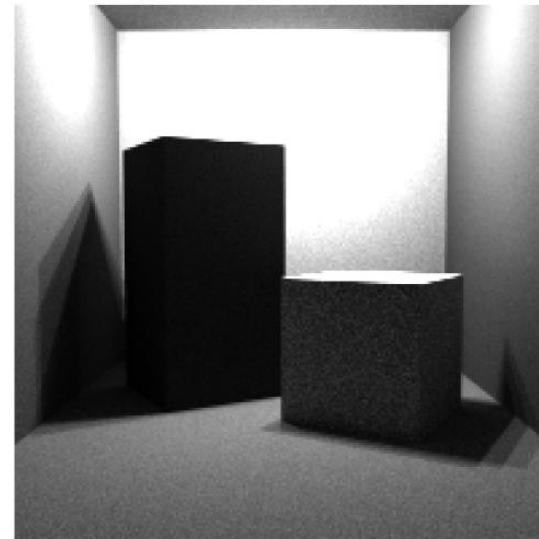
100,000 light rays



1,000,000 light rays



10,000,000 light rays

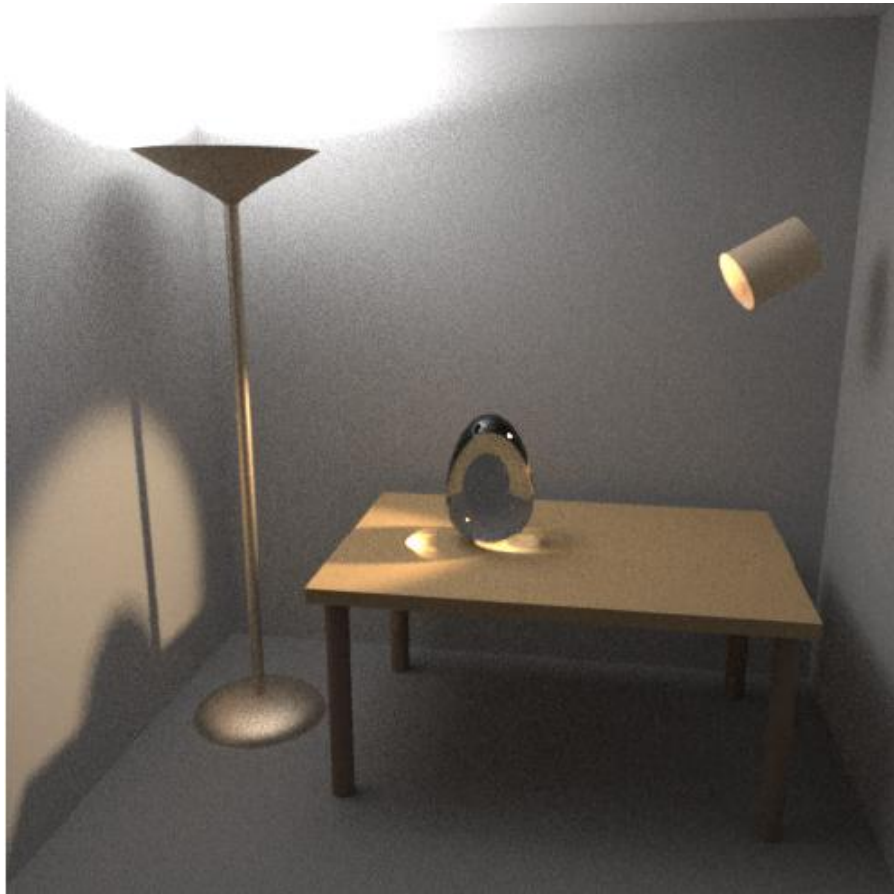


100,000,000 light rays

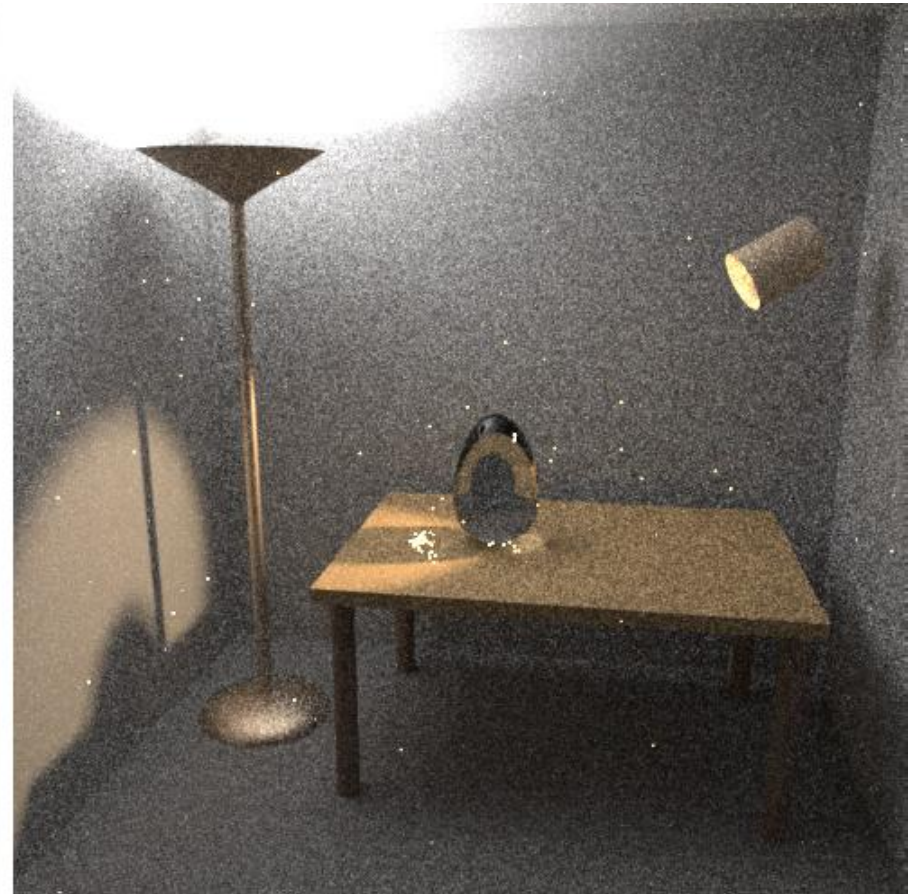
Sledování světla (light tracing) v praxi

- Obvykle mnohem menší účinnost než PT
- Může být účinnější pro některé světelné efekty (kaustiky)
- Základ obousměrných metod:
 - Obousměrné sledování cest (bidirectional path tracing, BPT)
 - photon mapping, etc.

Obousměrné sledování cest (BPT) vs. Sledování cest (PT)



BPT, 25 vzorků (cest) na pixel



PT, 56 vzorků (cest) na pixel

Image: Eric Veach

Přenos světla jako integrál přes prostor cest

Transport světla jako integrál

- **Cíl:** místo integrální rovnice chceme formulovat transport světla jako integrál přes cesty:

Příspěvek cesty x k hodnotě pixelu
(„contribution function”)

Míra na množině
světelných cest

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

Hodnota (“měření”)
j-tého pixelu

Prostor všech světelných cest
Spojujících zdroj světla s pixelem j

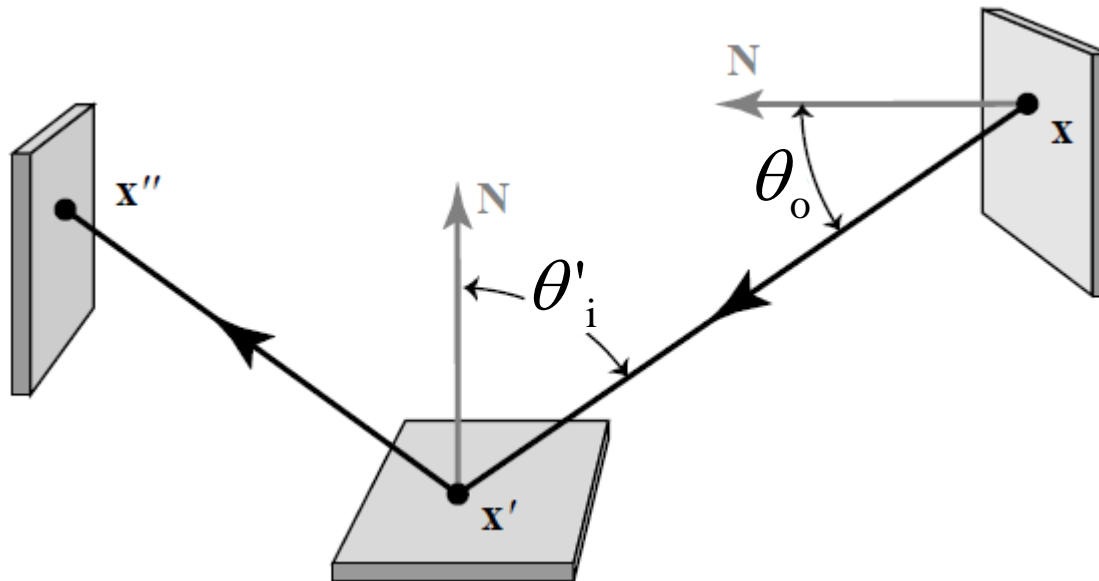
Transport světla jako integrál

■ Výhoda

- Možnost aplikovat klasické MC metody
- Aplikace kombinovaných estimátorů (MIS)
- Aplikace Metropolis vzorkování

Třibodová formulace přenosu světla

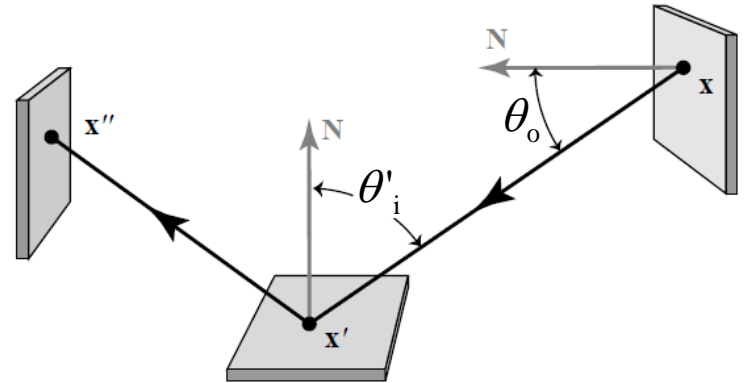
- Eliminace směrů (pouze body na ploše)



$$L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \equiv L(\mathbf{x}, \omega)$$

$$f_r(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') \equiv f_r(\mathbf{x}', \omega_i \rightarrow \omega_o)$$

Zobrazovací rovnice v 3b formulaci



$$L(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') = L_e(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') + \\ + \int_M L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \cdot f_r(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') dA_x$$

$$G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') = V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') \frac{|\cos \theta_o \cos \theta'_i|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}$$

Měřicí rovnice v 3b formulaci

$$I_j = \int_{M \times M} W_e^{(j)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \cdot L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') dA_x dA_{x'}$$

Důležitost emitovaná z \mathbf{x}' do \mathbf{x}
(Značení: šipka = směr šíření světla, nikoli důležitosti)

\mathbf{x}' ... na senzoru

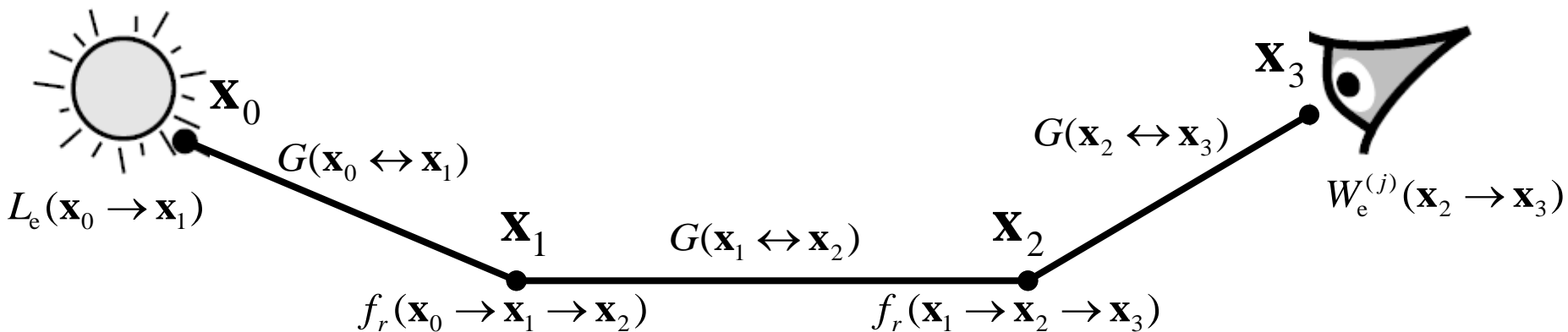
\mathbf{x} ... na ploše scény

Definice „funkce příspěvku“ (contribution function)

- Např.

$$\bar{x} = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3$$

$$f_j(\bar{x}) = L_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1) f_r(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \\ \cdot G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2) f_r(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \\ \cdot G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3) W_e^{(j)}(\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3)$$



Definice „funkce příspěvku“ (contribution function)

- Z rekurzivní expanze 3b formulace zobrazovací rce

$$f_j(\bar{x}) = L_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1)$$

$$G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} f_r(\mathbf{x}_{i-1} \rightarrow \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1}) G(\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}_{i+1})$$

$$W_e^{(j)}(\mathbf{x}_{k-1} \rightarrow \mathbf{x}_k)$$

Obor integrování

Ω_k ... množina cest délky k

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k$$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \quad \text{množina cest všech možných délek}$$

Míra na prostoru cest

Diferenciální míra pro cesty délky k

$$d\mu(\bar{x}) = d\mu(\mathbf{x}_0 \dots \mathbf{x}_k) = dA_{\mathbf{x}_0} \cdots dA_{\mathbf{x}_k}$$

Tj. násobný integrál přes plochu scény, pro každý vrchol cesty jedna „fajfka“

Transport světla jako integrál

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

Aplikace integrálu přes cesty

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

Odhad integrálu pomocí klasických Monte Carlo metod:

$$I_j \approx \frac{f_j(\bar{X})}{p(\bar{X})}$$

Jak definovat a spočítat hustotu na prostoru cest?

Hustota p-nosti na prostoru cest

- Hustota pravděpodobnosti cesty

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k$$

- Sdružená hustota pozic vrcholů cesty:

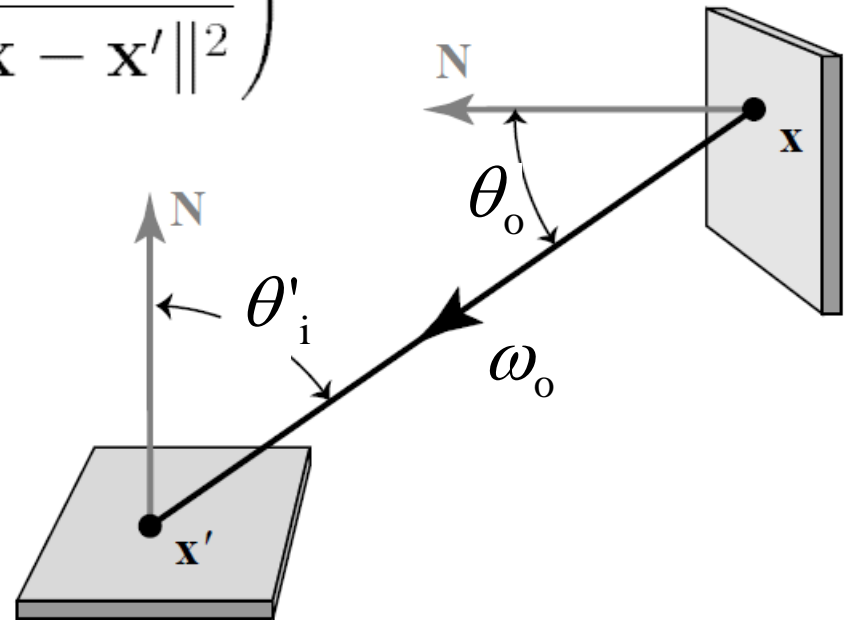
$$\begin{aligned} p(\bar{\mathbf{x}}) &= p(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \\ &= p(\mathbf{x}_0) p(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_0) p(\mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \dots \end{aligned}$$

- Součin podmíněných hustot pro jednotlivé vrcholy (vzhledem k plošné míře)

Hustota pro vzorkování směru

- Hustota p-nosti není invariantní vůči míře
- Nutno konvertovat z $d\omega$ na dA

$$p(\mathbf{x}') = p(\omega_o) \left(\frac{|\cos(\theta'_i)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2} \right)$$



Path / light tracing v jako integrál přes prostor cest

- Path tracing odpovídá jedné možné technice pro vzorkování světlených cest
 - Hustota vzorkování cesty: vykrátí se geometrické faktory
- Light tracing je jen jiná možná technika pro vzorkování světlených cest

Obousměrné sledování cest (Bidirectional path tracing)

Obousměrné sledování cest

- Kombinace různých vzorkovacích technik pro integrál na prostoru cest

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) \, d\mu(\bar{x})$$

Vzorkovací strategie

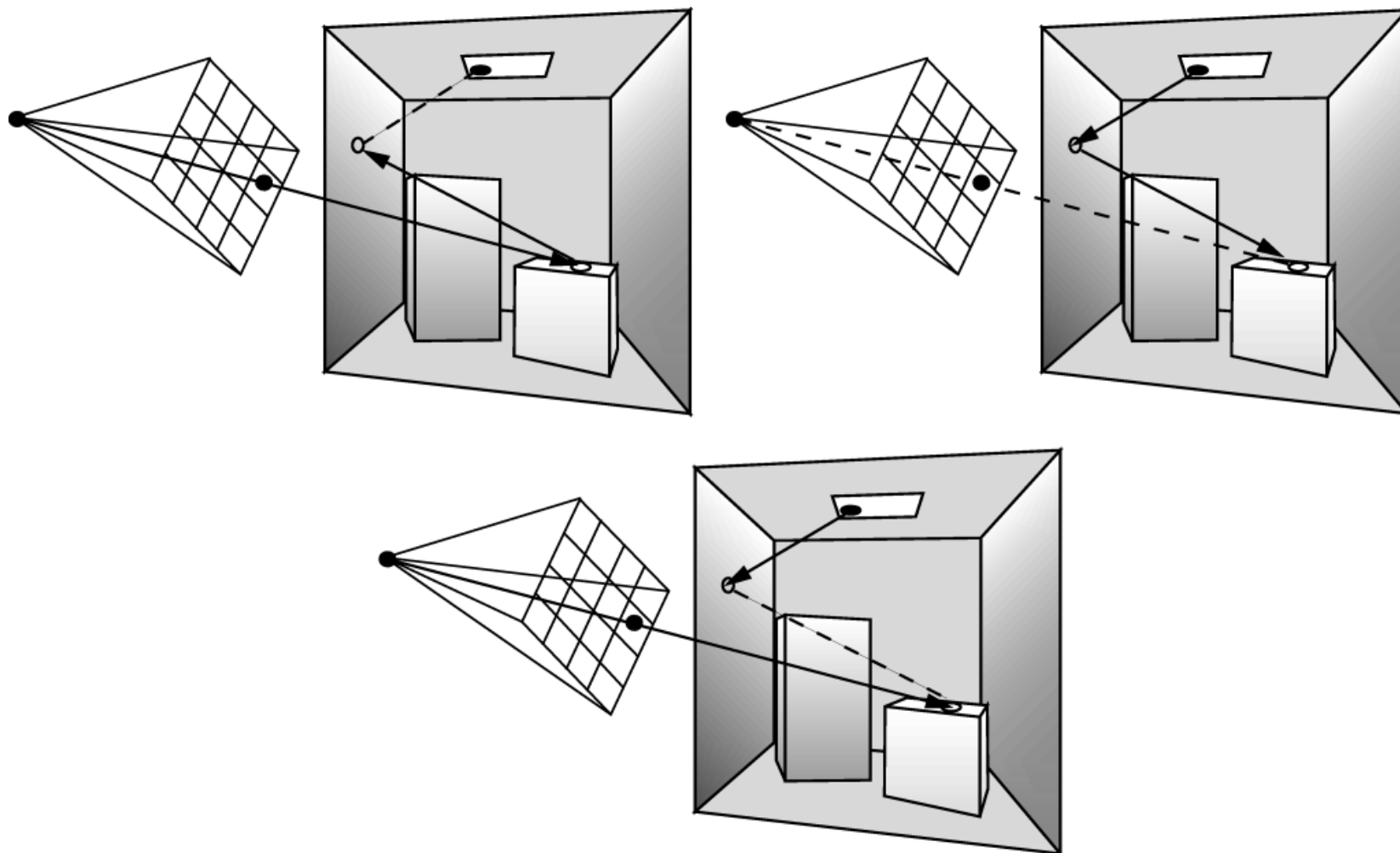


Image: Dutre et al. Advanced Global Illumination

Obousměrné sledování cest

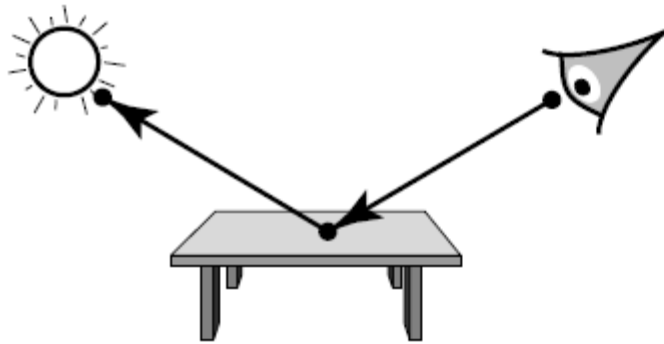
- Zobecnění kombinované strategie pro výpočet přímého osvětlení v path traceru
- Přímé osvětlení
 - Různé strategie nalezení vzorkování bodu na zdroji světla
- BPT
 - Různé strategie generování **celých světelných cest**

Obousměrné sledování cest

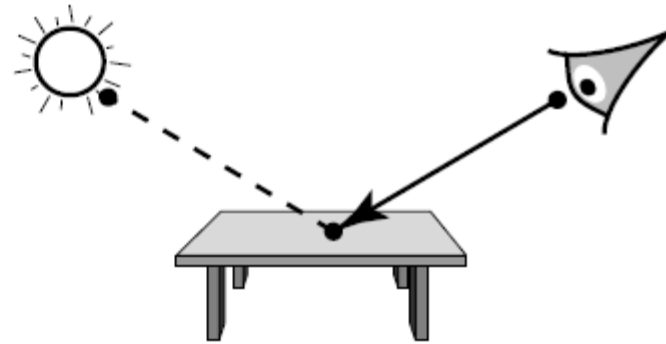
- Pro danou světelnou cestu:
 - Funkce příspěvku $f_j()$ **nezávisí** na způsobu vzorkování
 - Hustota pravděpodobnosti **závisí** na způsobu vzorkování

Vzorkovací techniky v BPT

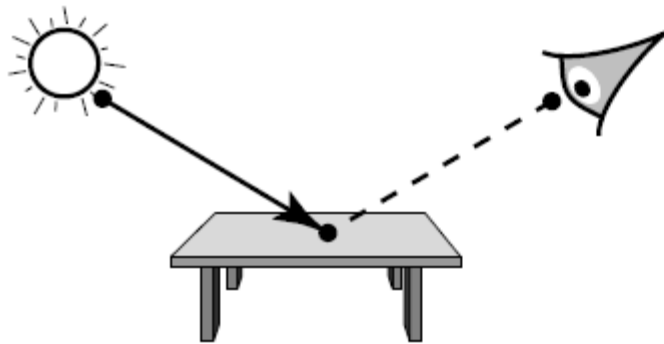
Příklad: Čtyři vzorkovací techniky pro $k = 2$



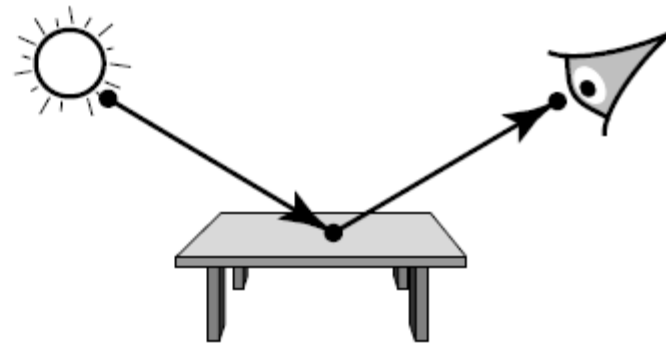
(a) $s = 0, t = 3$



(b) $s = 1, t = 2$



(c) $s = 2, t = 1$



(d) $s = 3, t = 0$

Image: Eric Veach

Vzorkovací techniky v BPT

- Podcesta o t vrcholech vzorkovaná z kamery
- Podcesta o s vrcholech vzorkovaná ze světla
- Spojovací segment délky 1
- Celková délka cesty: $k = s + t - 1$ (segmentů)

- $k+2$ možností pro generování cesty délky k

Vzorkovací techniky v BPT

- Každá technika má **jinou hustotu** $p_{s,t}$
- Každá je účinná při vzorkování jiných světelných efektů
- Všechny techniky odhadují **stejný integrál**

Kombinace vzorkovacích technik

- Kombinovaný estimátor (MIS)

$$F = \sum_{s \geq 0} \sum_{t \geq 0} w_{s,t}(\bar{x}_{s,t}) \frac{f_j(\bar{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\bar{x}_{s,t})}$$

kombinační strategie
(např. vyvážená heuristika)

Implementace: Generování cest po skupinách

- Generuj podcestu náhodné délky **od světla**

$$Y_0 \dots Y_{n_L-1}$$

- Generuj podcestu náhodné délky **od kamery**

$$Z_{n_E-1} \dots Z_0$$

- Spoj každý **prefix cesty od světla** s každým **sufixem cesty od kamery**

$$\bar{x}_{s,t} = Y_0 \dots Y_{s-1} Z_{t-1} \dots Z_0$$

(cesta = vzorek z hustoty $p_{s,t}$)

Generování cest po skupinách

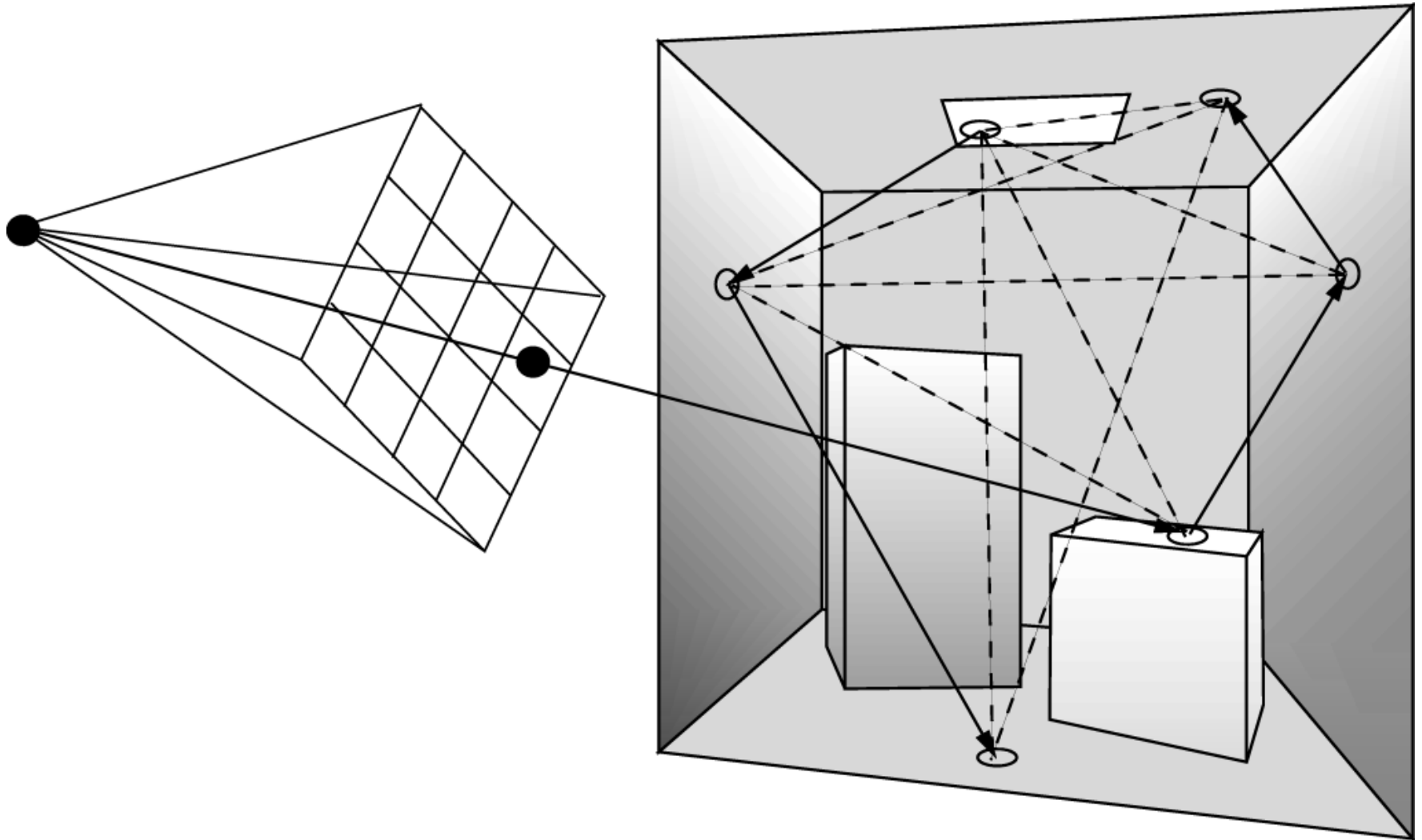
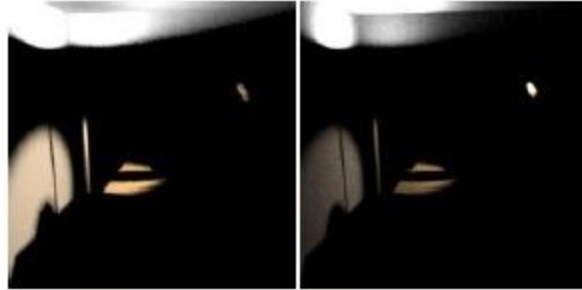


Image: Dutre et al. Advanced Global Illumination



$k = 2$
(2x)



$k = 3$
(4x)



$k = 4$
(8x)



$k = 5$
(16x)

$s = 1$

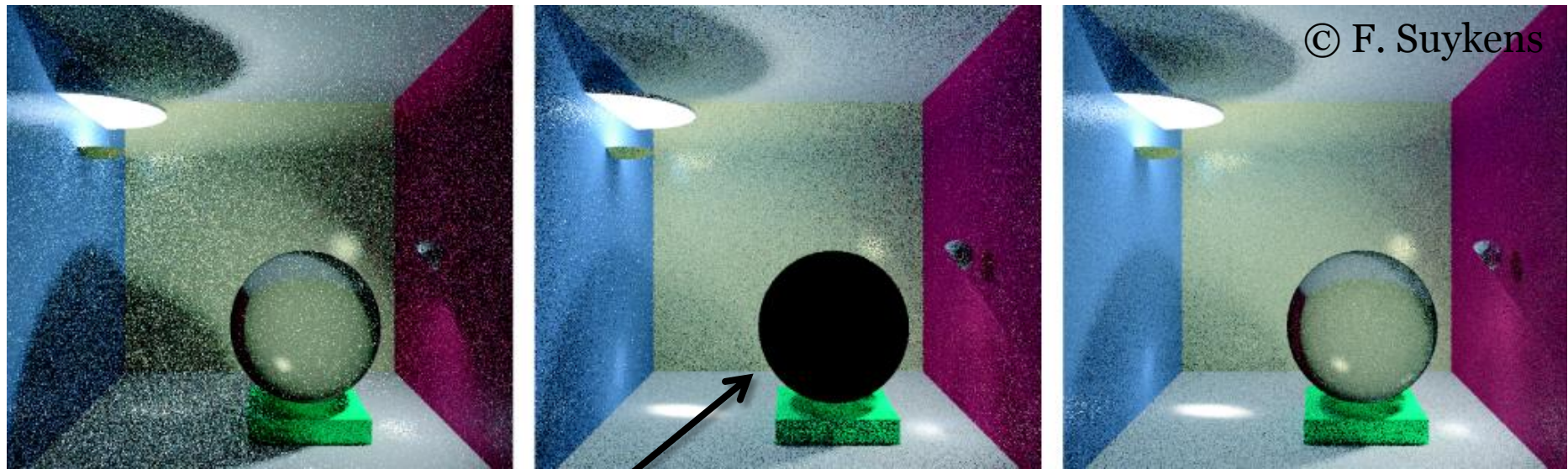
$s = 2 \dots$

$t = 2$

$t = 1$

$s / t =$ počet vrcholů na podceste od světla / kamery

Porovnání algoritmů



Path tracing

Light tracing

Bidirectional path tracing

Kvíz: Proč je skleněná koule černá?

E. Veach: *Robust Monte Carlo methods for light transport simulation*, PhD thesis, Stanford University, 1997, pp. 219-230, 297-317

http://www.graphics.stanford.edu/papers/veach_thesis/